

Úvod do výrokové logiky



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Extenze a intenze

typ výrazu	extenze	intenze
individuový výraz	jednotlivý objekt	individuový pojem
predikát	množina objektů či relace	vlastnost či vztah
věta	<i>pravdivostní hodnota</i>	propozice

Princip bivalence

Každý výrok je buď pravdivý, nebo nepravdivý — nikdy ne obojí a vždy alespoň jedno z toho.

Princip kompozicionality

Význam složeného výrazu je určen významy jeho částí a tím jak se tyto části skládají.

Princip extenzionality

Extenze složeného výrazu je určena extenzemi jeho částí a tím, jak se tyto části skládají.

Extenzionální a neextenzionální kontexty

Extenzionální kontexty:

- Platón je filosof.
- Každý člověk je smrtelný.
- Není pravda, že Plzeň je hlavní město ČR.
- V roce 1994 byl prezidentem ČR Václav Havel a prezidentem USA byl George Bush.

Neextenzionální kontexty:

- Karel by chtěl být prezidentem ČR.
- Nutně platí, že $2 + 2 = 4$.
- Petr věří, že zítra bude sněžit.

Extenzionální a neextenzionální kontexty

Extenzionální kontexty:

- Platón je filosof.
- Každý člověk je smrtelný.
- Není pravda, že Plzeň je hlavní město ČR.
- V roce 1994 byl prezidentem ČR Václav Havel a prezidentem USA byl George Bush.

Neextenzionální kontexty:

- Karel by chtěl být prezidentem ČR.
- Nutně platí, že $2 + 2 = 4$.
- Petr věří, že zítra bude sněžit.

Extenzionální a neextenzionální kontexty

Extenzionální kontexty:

- Platón je filosof.
- Každý člověk je smrtelný.
- Není pravda, že Plzeň je hlavní město ČR.
- V roce 1994 byl prezidentem ČR Václav Havel a prezidentem USA byl George Bush.

Neextenzionální kontexty:

- Karel by chtěl být prezidentem ČR.
- Nutně platí, že $2 + 2 = 4$.
- Petr věří, že zítra bude sněžit.

Extenzionální a neextenzionální kontexty

Extenzionální kontexty:

- Platón je filosof.
- Každý člověk je smrtelný.
- Není pravda, že Plzeň je hlavní město ČR.
- V roce 1994 byl prezidentem ČR Václav Havel a prezidentem USA byl George Bush.

Neextenzionální kontexty:

- Karel by chtěl být prezidentem ČR.
- Nutně platí, že $2 + 2 = 4$.
- Petr věří, že zítra bude sněžit.

Extenzionální a neextenzionální kontexty

Extenzionální kontexty:

- Platón je filosof.
- Každý člověk je smrtelný.
- Není pravda, že Plzeň je hlavní město ČR.
- V roce 1994 byl prezidentem ČR Václav Havel a prezidentem USA byl George Bush.

Neextenzionální kontexty:

- Karel by chtěl být prezidentem ČR.
- Nutně platí, že $2 + 2 = 4$.
- Petr věří, že zítra bude sněžit.

Extenzionální a neextenzionální kontexty

Extenzionální kontexty:

- Platón je filosof.
- Každý člověk je smrtelný.
- Není pravda, že Plzeň je hlavní město ČR.
- V roce 1994 byl prezidentem ČR Václav Havel a prezidentem USA byl George Bush.

Neextenzionální kontexty:

- Karel by chtěl být prezidentem ČR.
- Nutně platí, že $2 + 2 = 4$.
- Petr věří, že zítra bude sněžit.

Extenzionální a neextenzionální kontexty

Extenzionální kontexty:

- Platón je filosof.
- Každý člověk je smrtelný.
- Není pravda, že Plzeň je hlavní město ČR.
- V roce 1994 byl prezidentem ČR Václav Havel a prezidentem USA byl George Bush.

Neextenzionální kontexty:

- Karel by chtěl být prezidentem ČR.
- Nutně platí, že $2 + 2 = 4$.
- Petr věří, že zítra bude sněžit.

Extenzionální a neextenzionální kontexty

Extenzionální kontexty:

- Platón je filosof.
- Každý člověk je smrtelný.
- Není pravda, že Plzeň je hlavní město ČR.
- V roce 1994 byl prezidentem ČR Václav Havel a prezidentem USA byl George Bush.

Neextenzionální kontexty:

- Karel by chtěl být prezidentem ČR.
- Nutně platí, že $2 + 2 = 4$.
- Petr věří, že zítra bude sněžit.

Logické operátory výrokové logiky

... a ...	konjunkce	\wedge
... nebo	disjunkce	\vee
jestliže ..., pak ...	implikace	\rightarrow
... právě tehdy, když ...	ekvivalence	\leftrightarrow
není pravda, že ...	negace	\neg

Syntax: Formální jazyk klasické výrokové logiky

- Mimologickými symboly jsou tzv. atomy: p_1, p_2, p_3, \dots
- Logickými symboly jsou operátory: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$.

Syntax: Formální jazyk klasické výrokové logiky

- Mimologickými symboly jsou tzv. atomy: p_1, p_2, p_3, \dots
- Logickými symboly jsou operátory: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$.

Gramatika: Induktivní definice formule KVL

Definice

Každý atom je formule (atomická formule). Jestliže φ je formule, pak $\neg\varphi$ je také formule. Pokud φ, ψ jsou formule, pak $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou také formule.

Syntaktické pojmy: Podformule, konstrukce formule, syntaktický strom

- Podformule formule φ je každá část formule φ , která je sama formulí.
- Konstrukce formule φ je posloupnost formulí zobrazující, jak lze postupně vytvořit formuli φ z atomů pomocí spojek.
- Syntaktický strom je alternativní reprezentace struktury dané formule.

Syntaktické pojmy: Podformule, konstrukce formule, syntaktický strom

- Podformule formule φ je každá část formule φ , která je sama formulí.
- Konstrukce formule φ je posloupnost formulí zobrazující, jak lze postupně vytvořit formuli φ z atomů pomocí spojek.
- Syntaktický strom je alternativní reprezentace struktury dané formule.

Syntaktické pojmy: Podformule, konstrukce formule, syntaktický strom

- Podformule formule φ je každá část formule φ , která je sama formulí.
- Konstrukce formule φ je posloupnost formulí zobrazující, jak lze postupně vytvořit formuli φ z atomů pomocí spojek.
- Syntaktický strom je alternativní reprezentace struktury dané formule.

Pravdivostní funkce

Definice

n -argumentová funkce přiřazuje n -ticím pravdivostních hodnot pravdivostní hodnoty.

Logické operátory jakožto pravdivostní funkce

Logické operátory operují na extenzích vět. Extenze vět jsou pravdivostní hodnoty. Tudíž logické operátory lze chápat jako pravdivostní funkce.

Jednoargumentové pravdivostní funkce

x	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Dvouargumentové pravdivostní funkce

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

x	y	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Pravdivostní tabulka negace

x	$f_{\neg}(x)$
1	0
0	1

Ostatní spojky

x	y	$f_{\wedge}(x, y)$	$f_{\vee}(x, y)$	$f_{\rightarrow}(x, y)$	$f_{\leftrightarrow}(x, y)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Cvičení: Formalizujte následující věty

- Jestliže přijde brzy podzim nebo v létě začne hodně pršet a bude zima, pak pokud budu zdravý, dopíšu knihu a začnu s rekonstrukcí bytu.
- Václav nastartoval auto a odjel.
- Sokratés a Aristotelés jsou filosofové.
- Soužití psa a člověka trvá již 130 tisíc let.
- Karel, ani Petr nejsou trémisti.
- Petr přišel, ale už bylo pozdě.
- Na poskytnutí příspěvku nebo půjčky není nárok.
- Ubytujeme vás jen za předpokladu, že nemáte žádná zvířata.

Cvičení: Formalizujte následující věty

- Jestliže přijde brzy podzim nebo v létě začne hodně pršet a bude zima, pak pokud budu zdravý, dopíšu knihu a začnu s rekonstrukcí bytu.
- Václav nastartoval auto a odjel.
- Sokratés a Aristotelés jsou filosofové.
- Soužití psa a člověka trvá již 130 tisíc let.
- Karel, ani Petr nejsou trémisti.
- Petr přišel, ale už bylo pozdě.
- Na poskytnutí příspěvku nebo půjčky není nárok.
- Ubytujeme vás jen za předpokladu, že nemáte žádná zvířata.

Cvičení: Formalizujte následující věty

- Jestliže přijde brzy podzim nebo v létě začne hodně pršet a bude zima, pak pokud budu zdravý, dopíšu knihu a začnu s rekonstrukcí bytu.
- Václav nastartoval auto a odjel.
- Sokratés a Aristotelés jsou filosofové.
- Soužití psa a člověka trvá již 130 tisíc let.
- Karel, ani Petr nejsou trémisti.
- Petr přišel, ale už bylo pozdě.
- Na poskytnutí příspěvku nebo půjčky není nárok.
- Ubytujeme vás jen za předpokladu, že nemáte žádná zvířata.

Cvičení: Formalizujte následující věty

- Jestliže přijde brzy podzim nebo v létě začne hodně pršet a bude zima, pak pokud budu zdravý, dopíšu knihu a začnu s rekonstrukcí bytu.
- Václav nastartoval auto a odjel.
- Sokratés a Aristotelés jsou filosofové.
- Soužití psa a člověka trvá již 130 tisíc let.
- Karel, ani Petr nejsou trémisti.
- Petr přišel, ale už bylo pozdě.
- Na poskytnutí příspěvku nebo půjčky není nárok.
- Ubytujeme vás jen za předpokladu, že nemáte žádná zvířata.

Cvičení: Formalizujte následující věty

- Jestliže přijde brzy podzim nebo v létě začne hodně pršet a bude zima, pak pokud budu zdravý, dopíšu knihu a začnu s rekonstrukcí bytu.
- Václav nastartoval auto a odjel.
- Sokratés a Aristotelés jsou filosofové.
- Soužití psa a člověka trvá již 130 tisíc let.
- Karel, ani Petr nejsou trémisti.
- Petr přišel, ale už bylo pozdě.
- Na poskytnutí příspěvku nebo půjčky není nárok.
- Ubytujeme vás jen za předpokladu, že nemáte žádná zvířata.

Cvičení: Formalizujte následující věty

- Jestliže přijde brzy podzim nebo v létě začne hodně pršet a bude zima, pak pokud budu zdravý, dopíšu knihu a začnu s rekonstrukcí bytu.
- Václav nastartoval auto a odjel.
- Sokratés a Aristotelés jsou filosofové.
- Soužití psa a člověka trvá již 130 tisíc let.
- Karel, ani Petr nejsou trémisti.
- Petr přišel, ale už bylo pozdě.
- Na poskytnutí příspěvku nebo půjčky není nárok.
- Ubytujeme vás jen za předpokladu, že nemáte žádná zvířata.

Cvičení: Formalizujte následující věty

- Jestliže přijde brzy podzim nebo v létě začne hodně pršet a bude zima, pak pokud budu zdravý, dopíšu knihu a začnu s rekonstrukcí bytu.
- Václav nastartoval auto a odjel.
- Sokratés a Aristotelés jsou filosofové.
- Soužití psa a člověka trvá již 130 tisíc let.
- Karel, ani Petr nejsou trémisti.
- Petr přišel, ale už bylo pozdě.
- Na poskytnutí příspěvku nebo půjčky není nárok.
- Ubytujeme vás jen za předpokladu, že nemáte žádná zvířata.

Cvičení: Formalizujte následující věty

- Jestliže přijde brzy podzim nebo v létě začne hodně pršet a bude zima, pak pokud budu zdravý, dopíšu knihu a začnu s rekonstrukcí bytu.
- Václav nastartoval auto a odjel.
- Sokratés a Aristotelés jsou filosofové.
- Soužití psa a člověka trvá již 130 tisíc let.
- Karel, ani Petr nejsou trémisti.
- Petr přišel, ale už bylo pozdě.
- Na poskytnutí příspěvku nebo půjčky není nárok.
- Ubytujeme vás jen za předpokladu, že nemáte žádná zvířata.

Interpretace

Interpretace je funkce, která přiřadí každému atomickému výroku nějakou pravdivostní hodnotu.

Tarského definice pravdy

- $I \models p$ p.t.k. $I(p) = 1$.
- $I \models \neg\varphi$ p.t.k. není pravda, že $I \models \varphi$.
- $I \models \varphi \wedge \psi$ p.t.k. $I \models \varphi$ a $I \models \psi$.
- $I \models \varphi \vee \psi$ p.t.k. $I \models \varphi$ nebo $I \models \psi$.
- $I \models \varphi \rightarrow \psi$ p.t.k. není pravda, že $I \models \varphi$ nebo platí, že $I \models \psi$.
- $I \models \varphi \leftrightarrow \psi$ p.t.k. $I \models \varphi$ právě tehdy, když $I \models \psi$.

Model a kontra-model formule, model množiny formulí

Definice

Interpretace I je modelem formule φ p.t.k. $I \models \varphi$. Interpretace I je kontra-modelem formule φ p.t.k. I není modelem formule φ .

Interpretace I je modelem množiny formulí p.t.k. I je modelem každé formule z této množiny.

Pojem vyplývání

Definice

Závěr vyplývá z předpokladů, když každý model předpokladů je modelem závěru.

(Ekvivalentně: Neexistuje model předpokladů, který by současně byl kontra-modelem závěru.)

Značíme: $T \models \varphi$.

Logická ekvivalence

φ, ψ jsou logicky ekvivalentní formule, když $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$.

Sémantické pojmy

- Formule je splnitelná, když je alespoň v jedné interpretaci pravdivá.
- Množina formulí je splnitelná, když má model.
- Formule je tautologie, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Formule je kontradikce, když není v žádné interpretaci pravdivá.

Sémantické pojmy

- Formule je splnitelná, když je alespoň v jedné interpretaci pravdivá.
- Množina formulí je splnitelná, když má model.
- Formule je tautologie, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Formule je kontradikce, když není v žádné interpretaci pravdivá.

Sémantické pojmy

- Formule je splnitelná, když je alespoň v jedné interpretaci pravdivá.
- Množina formulí je splnitelná, když má model.
- Formule je tautologie, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Formule je kontradikce, když není v žádné interpretaci pravdivá.

Sémantické pojmy

- Formule je splnitelná, když je alespoň v jedné interpretaci pravdivá.
- Množina formulí je splnitelná, když má model.
- Formule je tautologie, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Formule je kontradikce, když není v žádné interpretaci pravdivá.

Sémantické pojmy

- Formule je splnitelná, když je alespoň v jedné interpretaci pravdivá.
- Množina formulí je splnitelná, když má model.
- Formule je tautologie, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Formule je kontradikce, když není v žádné interpretaci pravdivá.

Důležité tautologie

- $\varphi \vee \neg\varphi$ (princip vyloučeného třetího)
- $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (princip sporu)
- $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ (princip dvojí negace)

Příklady logických ekvivalencí

- $\neg(\varphi \vee \psi)$ je log. ekviv. s $\neg\varphi \wedge \neg\psi$
- $\neg(\varphi \wedge \psi)$ je log. ekviv. s $\neg\varphi \vee \neg\psi$
- $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ je log. ekviv. s $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$
- $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ je log. ekviv. s $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
- $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$ je log. ekviv. s $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$

Vztahy mezi spojkami

- $\varphi \rightarrow \psi$ je log. ekv. s $\neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \rightarrow \psi$ je log. ekv. s $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\varphi \wedge \psi$ je log. ekv. s $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
- $\varphi \wedge \psi$ je log. ekv. s $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $\varphi \vee \psi$ je log. ekv. s $\neg\varphi \rightarrow \psi$
- $\varphi \vee \psi$ je log. ekv. s $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Vztahy mezi sémantickými pojmy

- φ je tautologie právě tehdy, když $\neg\varphi$ je kontradikce.
- $\varphi \models \psi$ právě tehdy, když $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie.
- φ je log. ekvivalentní s ψ právě tehdy, když $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie.
- $T \models \varphi$ právě tehdy, když $T \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.

Vztahy mezi sémantickými pojmy

- φ je tautologie právě tehdy, když $\neg\varphi$ je kontradikce.
- $\varphi \models \psi$ právě tehdy, když $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie.
- φ je log. ekvivalentní s ψ právě tehdy, když $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie.
- $T \models \varphi$ právě tehdy, když $T \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.

Vztahy mezi sémantickými pojmy

- φ je tautologie právě tehdy, když $\neg\varphi$ je kontradikce.
- $\varphi \models \psi$ právě tehdy, když $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie.
- φ je log. ekvivalentní s ψ právě tehdy, když $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie.
- $T \models \varphi$ právě tehdy, když $T \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.

Vztahy mezi sémantickými pojmy

- φ je tautologie právě tehdy, když $\neg\varphi$ je kontradikce.
- $\varphi \models \psi$ právě tehdy, když $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie.
- φ je log. ekvivalentní s ψ právě tehdy, když $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie.
- $T \models \varphi$ právě tehdy, když $T \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.

Axiomatizace

Definice

Hilbertovský kalkul pro klasickou výrokovou logiku sestává ze tří axiomatických schémat

$$H1 \quad \vartheta \rightarrow (\chi \rightarrow \vartheta),$$

$$H2 \quad (\vartheta \rightarrow (\chi \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\vartheta \rightarrow \chi) \rightarrow (\vartheta \rightarrow \gamma)),$$

$$H3 \quad (\neg\chi \rightarrow \neg\vartheta) \rightarrow (\vartheta \rightarrow \chi),$$

a odvozovacího pravidla modus ponens:

$$mp \quad \vartheta, \vartheta \rightarrow \chi / \chi.$$

Úplnost a korektnost Hilbertovského kalkulu

Věta o korektnosti: Jestliže ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, pak $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, pak ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Úplnost a korektnost Hilbertovského kalkulu

Věta o korektnosti: Jestliže ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, pak $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, pak ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Úplnost a korektnost Hilbertovského kalkulu

Věta o korektnosti: Jestliže ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, pak $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, pak ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.